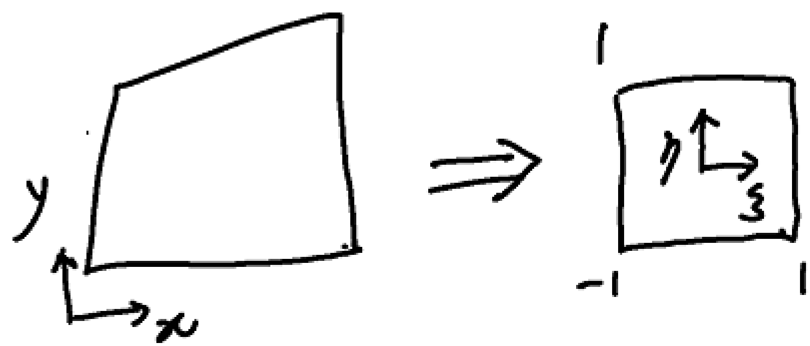
第三节 数值积分

(*) 对二维问题，其

$$\underset{\sim}{K}_e = \int_{\Omega} G(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G^{*}(\xi,\eta)\,|J|\,d\xi\,d\eta$$



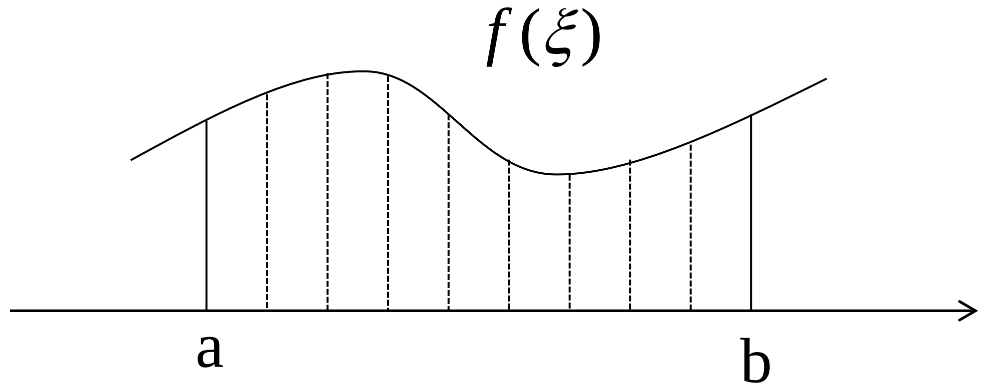
(*) 通过等参变换，将"x, y上的不规则区域积分"变换到

"ξ, η上的规则单元积分" ← 一般需用数值积分来完成

数值积分的基本概念

定义一维函数 $f(\xi)$

求 $\int_a^b f(\xi)\,d\xi$



$$\boxed{\int_a^b f(\xi)\,d\xi \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta h}$$

$$\boxed{I = \int_a^b f(\xi)\,d\xi \approx \sum_{i=1}^{n} W_i\ f(\xi_i)}$$

权系数　　积分点

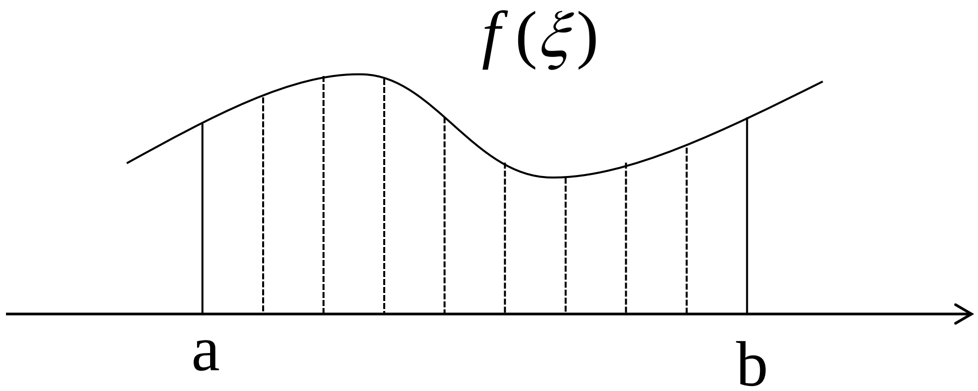
问题：

对于任意函数f(x)如何有效精确积分？

Newton-Cotes (牛顿-柯特斯)积分方案

Gaussian （高斯）积分方案

Newton-Cotes 公式

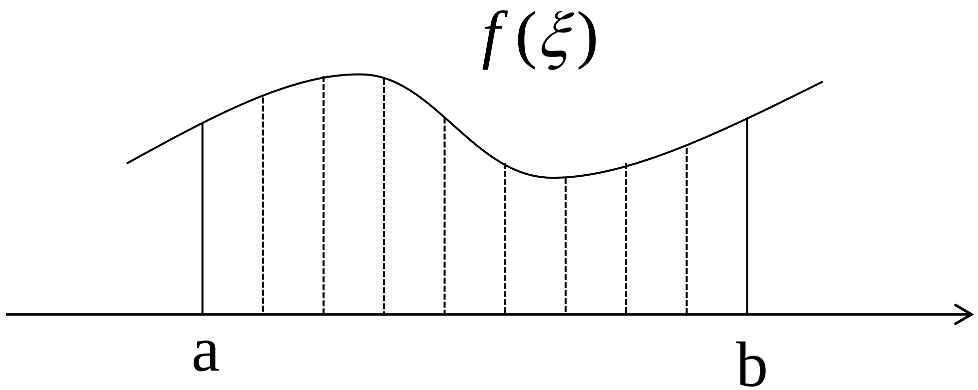


$$a \le \xi_0 < \xi_1 < \cdots\cdots < \xi_n \le b$$

1、取n+1个等间距分布的点，构造Lagrange多项式

$$L_n(\xi) = \sum_{i=0}^{n} l_i(\xi) f(\xi_i)$$

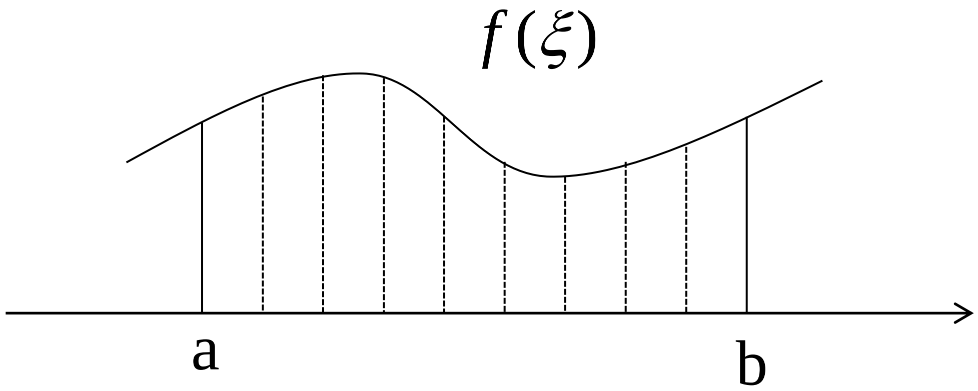
$$l_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_0)\cdots(\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1})\cdots(\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_0)\cdots(\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1})\cdots(\xi_i - \xi_n)}$$



$$a \le \xi_0 < \xi_1 < \cdots\cdots < \xi_n \le b$$

2、建立等效（等价）积分替代原积分方案

$$\int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \approx \int_a^b L_n(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} l_i(\xi)\, f(\xi_i)\,\mathrm{d}\xi$$



$$a \le \xi_0 < \xi_1 < \cdots\cdots < \xi_n \le b$$

3、求出等效积分方案的权系数

$$\int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} l_i(\xi) f(\xi_i)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) \int_a^b l_i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$W_i = \int_a^b l_i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$\int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} W_i \; f(\xi_i)$$

$$w_i = \int_a^b l_i(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$l_i(\xi) = \frac{(\xi-\xi_0)\cdots(\xi-\xi_{i-1})(\xi-\xi_{i+1})\cdots(\xi-\xi_n)}{(\xi_i-\xi_0)\cdots(\xi_i-\xi_{i-1})(\xi_i-\xi_{i+1})\cdots(\xi_i-\xi_n)}$$

于是可得到

$$w_i = \int_a^b \frac{(\xi-\xi_0)\cdots(\xi-\xi_{i-1})(\xi-\xi_{i+1})\cdots(\xi-\xi_n)}{(\xi_i-\xi_0)\cdots(\xi_i-\xi_{i-1})(\xi_i-\xi_{i+1})\cdots(\xi_i-\xi_n)}\mathrm{d}\xi$$

⑤ 对不同的积分点，可轻易求出H_i

设$\xi_{i+1} = a + ih \ (i=0,1,\dots,n-1)$

n为积分点数，$h=(b-a)/(n-1)$

$n=2$时：$\xi_1=a \quad \xi_2=b \Rightarrow H_1=\frac{1}{2}(b-a),\ H_2=\frac{1}{2}(b-a)$

$n=3$时：$\xi_1=a \quad \xi_2=\frac{a+b}{2} \quad \xi_3=b$

$\Downarrow$

$H_1=\frac{1}{6}(b-a) \quad H_2=\frac{4}{6}(b-a) \quad H_3=\frac{1}{6}(b-a)$

$n=4$时：……

n = 1~8 的Cotes 系数

$$\int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n} W_i \; f(\xi_i)$$

n	$c_i^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$
……	……								

例1: $\int_1^3 (1+\xi^2)\,d\xi$

$F(\xi)=(1+\xi^2)$

① 采用两点N-C积分:

$$\begin{cases}\xi_1=1 & H_1=1\\ \xi_2=3 & H_2=1\end{cases} \Rightarrow \int_1^3 F(\xi)\,d\xi=\sum_{i=1}^{2}[H_i F(\xi_i)]=1\times(1+1^2)+1\times(1+3^2)=12$$

② 采用三点N-C积分:

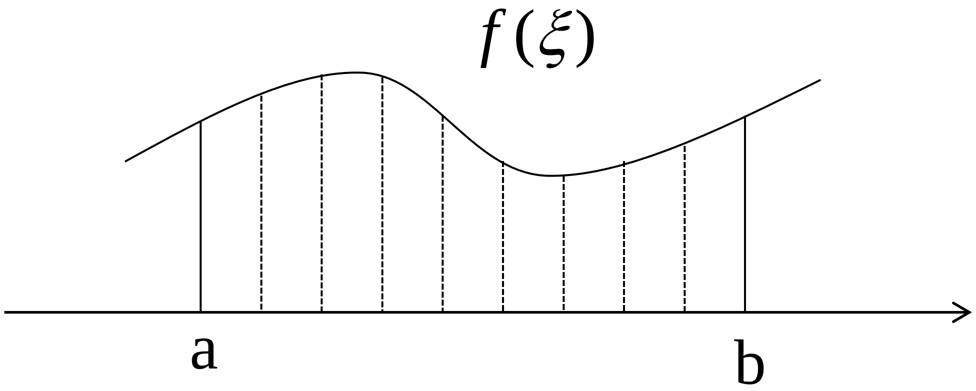
$\xi_1=1 \quad \xi_2=2 \quad \xi_3=3; \quad H_1=\frac{1}{3} \quad H_2=\frac{4}{3} \quad H_3=\frac{1}{3}$

$$故\int_1^3 F(\xi)d\xi=\sum_{i=1}^{3}[H_i F(\xi_i)]=\frac{1}{3}(1+1^2)+\frac{4}{3}(1+2^2)+\frac{1}{3}(1+3^2)=\frac{32}{3}$$

本问题精确解: $\int_1^3 (1+\xi^2)d\xi=\left(\xi+\frac{1}{3}\xi^3\right)\Big|_1^3=\frac{32}{3}$

$F(\xi)$为二次式,故三个积分点可实现精确积分

高斯积分



$$a \le \xi_0 < \xi_1 < \cdots\cdots < \xi_n \le b$$

定义权系数

$$\rho(\xi) = (\xi - \xi_0)\cdots(\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1})\cdots(\xi - \xi_n)$$

令

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\,j} \rho(\xi_i^{\,j}) = \int_a^b \xi^{\,j} \mathrm{d}\xi$$

从而确定 ξ_i

2, 高斯积分:

① ξ_i的取法: 定义n次多项式 $P(\xi)=(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\cdots(\xi-\xi_n)=\prod_{j=1}^{n}(\xi-\xi_j)$

由 $\int_a^b \xi^i P(\xi)\,d\xi=0$ 确定ξ_i的位置.

② 取n个不等距分布的点ξ_i, 按上述同样的方式构造$\phi(\xi)$:

$$\phi(\xi)=\sum_{i=1}^{n} l_i^{(n-1)}(\xi)\,F(\xi_i)+\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i\,\xi^i P(\xi)$$

③ $$\int_a^b F(\xi)\,d\xi \approx \int_a^b \phi(\xi)\,d\xi=\sum_{i=1}^{n}\int_a^b l_i^{(n-1)}(\xi)\,F(\xi_i)\,d\xi+\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i\underbrace{\int_a^b \xi^i P(\xi)\,d\xi}_{=0}$$

$$=\sum_{i=1}^{n} H_i\,F(\xi_i)$$

其中, $H_i=\int_a^b l_i^{(n-1)}(\xi)\,d\xi$

④ 设积分区域在(-1, 1)范围内取值，则

由 $\int_{-1}^{1} \xi^i p(\xi)\, d\xi = 0$ 求出 ξ_i' 的位置

$$H_i' = \int_{-1}^{1} l_i^{(n-1)}(\xi)\, d\xi$$

ξ_i', H_i' 为规格化后的积分点坐标和权系数

定义
$$\boxed{\begin{aligned} \xi_i &= \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\xi_i' \\ H_i &= \frac{b-a}{2} H_i' \end{aligned}}$$

则 $\int_a^b F(\xi)\, d\xi = \sum_{i=1}^{n} H_i F(\xi_i)$

例2：求两点高斯积分的 ξ_i' 和 H_i'

①设二次多项式：$P(\xi)=(\xi-\xi_1')(\xi-\xi_2')$

求积分点位置：$\int_{-1}^{1} P(\xi)\cdot\xi^{i}\,d\xi=0 \quad (i=0,1)$

$$\left.\begin{aligned}
&i=0\text{时}:\int_{-1}^{1}(\xi-\xi_1')(\xi-\xi_2')\,d\xi=\frac{2}{3}+2\xi_1'\xi_2'=0\\
&i=1\text{时}:\int_{-1}^{1}(\xi-\xi_1')(\xi-\xi_2')\,\xi\,d\xi=-\frac{2}{3}(\xi_1'+\xi_2')=0
\end{aligned}\right\}\text{解得}:\ \xi_1'=-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \xi_2'=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

④ 设积分区域在(-1, 1)范围内取值，则

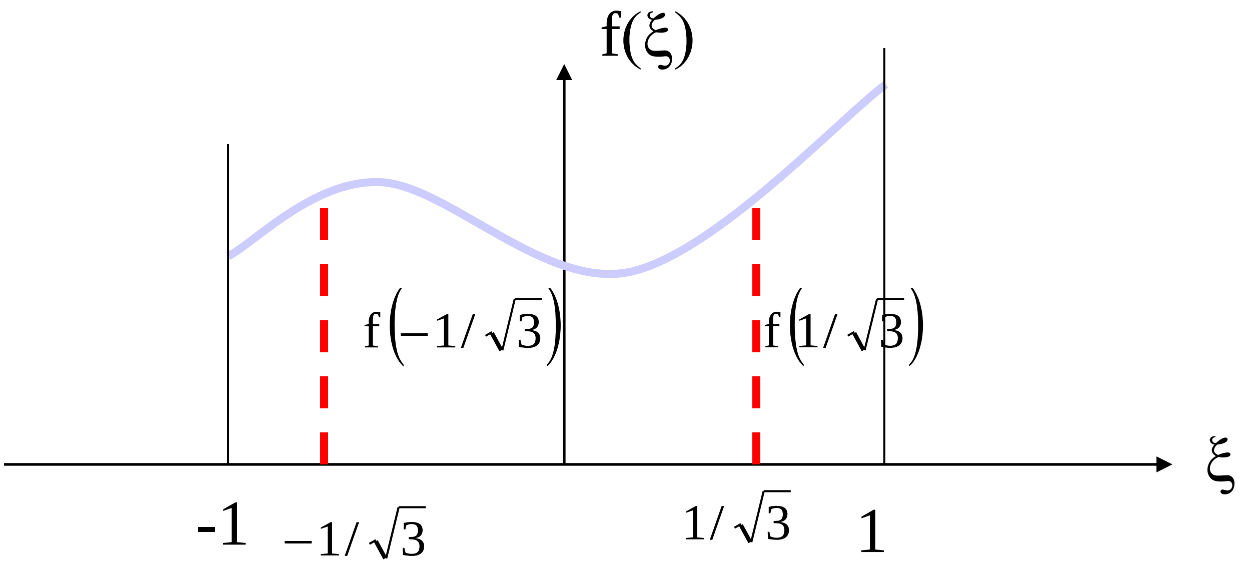
由 $\int_{-1}^{1} \xi^i p(\xi)\, d\xi = 0$ 求出 ξ_i' 的位置

$$H_i' = \int_{-1}^{1} l_i^{(n-1)}(\xi)\, d\xi$$

ξ_i', H_i' 为规格化后的积分点坐标和权系数

定义 $\boxed{\begin{aligned} \xi_i &= \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\xi_i' \\ H_i &= \frac{b-a}{2} H_i' \end{aligned}}$ 则 $\int_a^b F(\xi)\, d\xi = \sum_{i=1}^{n} H_i F(\xi_i)$

一维高斯积分



$$\int_{-1}^{1} f(\xi)\, d\xi \approx f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

积分精度到达2n-1=3次，即对于3次多项式能精确积分。

例3: $\int_1^3 (1+\xi^2)d\xi$ (与例1比较)

解: 用两点高斯积分:

① $a=1 \quad b=3$

② $\xi_1'=-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \xi_2'=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\quad H_1'=H_2'=1$

③ $\xi_1=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\xi_1'=2+\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad H_1=\frac{b-a}{2}H_1'=1$

$\xi_2=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\xi_2'=2-\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad H_2=\frac{b-a}{2}H_2'=1$

④ $\int_1^3 F(\xi)d\xi=\sum_{i=1}^{2}\left[H_iF(\xi_i)\right]=\left[1+\left(2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right]\times 1+\left[1+\left(2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right]\times 1=\frac{32}{3}$

由于两点高斯积分可实现 $2\times 2-1=3$ 次多项式的精确积分, 故本题为精确解

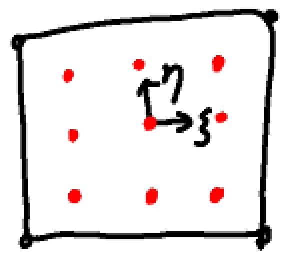
练习：

$$\int_1^5 \left(\frac{1}{x^2}+x^2\right)dx$$

用两点、三点 Newton－Cotes积分及两点高斯积分分别计算，并比较其与精确解的误差。

误差定义：$\Delta\varepsilon = \dfrac{\text{近似解}-\text{精确解}}{\text{精确解}} \times 100\%$

3.2 二维、三维高斯积分：



$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

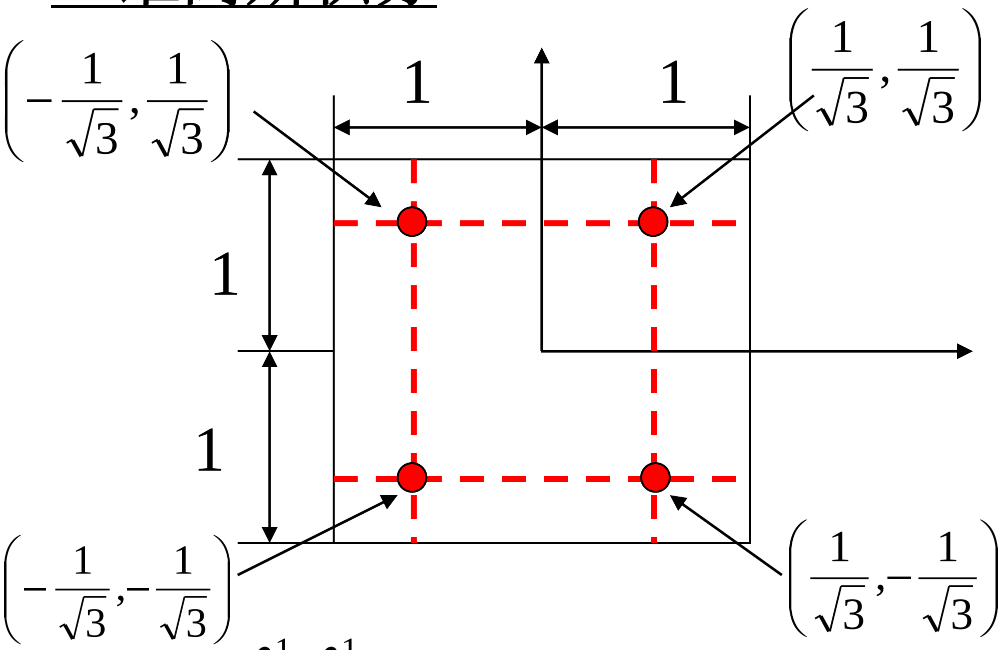
$$\simeq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}H_iH_jF(\xi_j,\eta_i)$$

※ 其中 H_i, H_j 是一维高斯积分的权系数，n 是每个坐标方向的积分点数。

※ 由高斯积分理论可知，如果 $F(\xi,\eta)=\sum a_{ij}\xi^j\eta^i$，且 $i,j\le 2n-1$，则上式给出的积分为精确值。

三维同理

二维高斯积分



$$\boxed{I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}$$

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$$

$$\approx\int_{-1}^{1}\left(\sum_{j=1}^{M}W_j f(\xi,\eta_j)\right)d\xi$$ 沿着 ξ 方向布置1维积分点

$$\approx\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}W_iW_j f(\xi_i,\eta_j)$$ 沿着 ξ 方向布置1维积分点

$$=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}W_{ij} f(\xi_i,\eta_j)$$ 其中$W_{ij}=W_i\,W_j$

5.3 等参元中积分阶次的选择原则

1、保证积分精度

※ 如二维4结点双线性单元，其插值函数含 $1, \xi, \eta, \xi\eta$ 项，

※ 若 $|J|$ 为常数，其刚度阵被积函数中含 $1, \xi, \eta, \xi^2, \eta^2, \xi\eta$ 项，
最高次为2次，故 2×2 高斯积分足够精确积分（精度 $2\times2-1=3$）.

※ 若 $|J|$ 非常数 ……

2、保证总刚矩阵总非奇异（不一定完全保证精确积分时）.